

排序问题

T1

T1.1

对于 μ 的任一分量 μ_i , 我们可以知道 $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $|\mu - \sigma_i^1| + |\mu - \sigma_i^2| + \dots + |\mu - \sigma_i^k| > |\mu_i - \sigma_i^1| + |\mu_i - \sigma_i^2| + \dots + |\mu_i - \sigma_i^k|$, 我们可以知道, μ_i 为 $\{\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^k\}$ 的中位数 $\therefore \mu_i = \begin{cases} \sigma_i^{k/2}, & k \text{ 为偶数} \\ \sigma_i^{(k+1)/2}, & k \text{ 为奇数} \end{cases}$ 我们取 σ_i^{\prime} 为 μ_i 在 $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k\}$ 中的排序, 对于相同的值则随机排序, 即为一种综合排序。然而, σ^{\star} 不能从中得出, 因为可能有相同的值。

T1.2



对于 ABC 三点, C 在线段 AB 上, $|C-A|+|C-B|=\text{const}$ 所以我们可以认为这两个点对于 $\sum \lim_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i|$ 与 $\sum \lim_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i|$ 的贡献是相同的, 所以我们可以令

$$\sum \lim_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i| = C + x_1$$

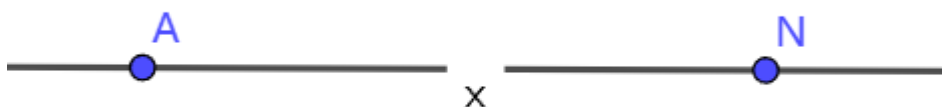
$$\sum \lim_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i| = C + x_2$$

其中常数 C 是共同贡献的总值, 于是

$$\frac{\sum \lim_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i|}{\sum \lim_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i|} = \frac{C + x_1}{C + x_2}$$

可知常数 C 越小, 比值越大

假设 $n-1$ 个点重合, 排序 $\sigma_j^i = N$ 点 A 距离 σ_j^i 距离为 x



μ_j 为中位数, 所以 μ_j 与 N 点重合

$$\sum_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i| = x$$

$$\mu_j \text{ 为平均数, } |\mu_j - N| = \frac{x}{n}$$

$$\sum_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i| = x + (n-2) \frac{x}{n}$$

所以

$$\frac{\sum_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i|}{\sum_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i|} = 1 + \frac{n-2}{n} \leq 2$$

得证

T1.3

$$\begin{aligned} d(\sigma^{\prime}, \Sigma) &= \\ \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^{\prime}, \sigma) &\leq \\ \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^{\prime}, \mu) &+ \\ \sum_{i=1}^k L_1(\mu, \sigma) & \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^*, \mu) + \sum_{i=1}^k L_1(\mu, \sigma)$$

$$\leq \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^*, \sigma) + \sum_{i=1}^k L_1(\sigma, \mu) + \sum_{i=1}^k L_1(\mu, \sigma)$$

$$= \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^*, \sigma) + 2 \sum_{i=1}^k L_1(\mu, \sigma)$$

$$= d(\sigma^*, \Sigma) + 2d(\mu, \Sigma)$$

$$\leq 3d(\sigma^*, \Sigma)$$

同理, 由T1.2知

$$\sum_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i| \leq 2 \sum_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i|$$

$$\begin{aligned} d(\sigma^{\prime}, \Sigma) &= \\ \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^{\prime}, \sigma) &\leq \\ \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^{\prime}, \beta) &+ \\ \sum_{i=1}^k L_1(\beta, \sigma) & \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^*, \sigma) + 2 \sum_{i=1}^k L_1(\beta, \sigma)$$

$$\leq \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^*, \sigma) + 4 \sum_{i=1}^k L_1(\mu, \sigma)$$

$$\leq 5d(\sigma^*, \Sigma)$$

得证

T2

T2.1

$$\mathbf{S} = (7, 8, -10, -5)^T$$

T2.2

$$\mathbf{S}^{(2)} = (37, -7, -17, -5)^T$$

T2.3

$$s^i = \sum_{j \in T_i} q_{ij}$$

在讨论 $\mathbf{S}^{(2)}$ 的计算时,

对于每个 $s^{(2)}_i$ 我们首先考虑单个 s_j 的情况, 对于 $\forall k \in T_j$, $q^{(2)}_{ik} = q_{ij} + q_{jk}$, 所以

$$q^{(2)}_{ik} = \sum_{l \in T_j} q_{il} + q_{jl} = l_{ij} + s_j$$

所以, $s^{(2)}_i$ 即为上式求和

$$s^{(2)}_i = \sum_{j \in T_i} l_{ij} + s_j = \sum_{j=0}^{n-1} m_{ij} (s_j + q_{ij}) = \sum_{j=0}^{n-1} m_{ij} s_j + s_i$$

如此求出每个 $s^{(2)}_i$, 即可得到 $\mathbf{S}^{(2)}$

$$\mathbf{S}^{(2)} = (\mathbf{M} + \mathbf{I}) \mathbf{S}$$

对于 \mathbf{M}^2 若 $m^2_{ik} \neq 0$, 则必然 $\exists j$ 使得 $m_{ij} m_{jk} = 1$ 所以 m^2_{ik} 的值即为 j 的个数, 即为 i 与 k 之间发生的间接比赛的场数

所以 \mathbf{M}^2 保存了所有间接比赛的场数

T2.4

我们易知

$$\mathbf{S}^{(3)} = \mathbf{M} \mathbf{S}^{(2)} + \mathbf{I}^2 \mathbf{S}$$

$$\mathbf{S}^{(n)} = \mathbf{M} \mathbf{S}^{(n-1)} + \mathbf{I}^{n-1} \mathbf{S}$$

所以递推得到

$$\mathbf{S}^{(n)} = \mathbf{M}^{n-1} \mathbf{S} + (\mathbf{M}^{n-1} - \mathbf{I}^{n-1}) \mathbf{E} (\mathbf{M} - \mathbf{I}) \mathbf{S}$$