

一、 k 名专家对 n 件作品按从优到劣的顺序进行排序, 用 $\sigma_j^i = l$ 表示专家 i 认为作品 j 位于第 l 位。记 $\sigma_i = (\sigma_1^i, \sigma_2^i, \dots, \sigma_n^i)$ 为专家 i 的排序向量, $i = 1, \dots, k$, $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ 为 k 名专家的排序集合。现希望给出一种能较好地反映所有专家意见的综合排序。

对两个 n 维向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 和 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, 定义它们之间的距离为 $L_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n |u_j - v_j|$ 。排序 σ 与一组排序 $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ 的综合距离定义为 $d(\sigma, \Sigma) = \sum_{i=1}^k L_1(\sigma, \sigma_i)$ 。对给定的 Σ , 与 Σ 综合距离最小的排序记为 σ^* 。

(1) 给定 $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$, 求 n 维向量 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, 使得 $\sum_{i=1}^k L_1(\mu, \sigma_i)$ 最小。你能否根据 μ 给出 n 件作品的一种综合排序 σ' , σ^* 是否也能从 μ 得到, 为什么;

(2) 有人提议用 Borda 计分法给出综合排序。首先计算作品 j 的平均得分 $\beta_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sigma_j^i$, 再按得分从小到大的顺序对作品进行排序 (得分相同的作品之间的顺序可任意确定), 由此给出一种综合排序 σ'' 。证明: 对任意 j , $\sum_{i=1}^k |\beta_j - \sigma_j^i| \leq 2 \sum_{i=1}^k |\mu_j - \sigma_j^i|$ 。

(3) 证明: $d(\sigma', \Sigma) \leq 3d(\sigma^*, \Sigma)$ 且 $d(\sigma'', \Sigma) \leq 5d(\sigma^*, \Sigma)$ 。

二、 n 支球队进行比赛, 每场比赛在两支球队之间进行, 任意两支球队之间至多进行一场比赛, 每支球队参与比赛的场数相同。记队 i 与队 j 比赛中, 队 i 的得分为 p_{ij} , 队 j 的得分为 p_{ji} , 队 i 的分差为 $q_{ij} = p_{ij} - p_{ji}$ 。与队 i 进行过比赛的球队集合记为 T_i 。约定 $i \in T_i$, 且 $q_{ii} = 0$ 。记 $|T_1| = |T_2| = \dots = |T_n| = l$ 。

A-B	5-10
A-D	57-45
B-C	10-7
C-D	3-10

(1) 记 s_i 为队 i 在各场比赛中分差之和, 即 $s_i = \sum_{j \in T_i} q_{ij}$, $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ 称为分差向量, 可用来衡量各球队的实力。若四支球队之间的比赛结果如表所示, 求向量 \mathbf{S} ;

(2) 对任意 $j \in T_i$, 若 $k \in T_j$, 则称队 i 与队 k 之间进行了一场“二级比赛”, 且在该场比赛中队 i 的分差为 $q_{ij} + q_{jk}$ 。(队 i 可与自身进行二级比赛, 队 i 与队 j 之间可以进行多场二级比赛)。记 $s_i^{(2)}$ 为队 i 在所有可能的 l^2 场二级比赛中的分差之和, $\mathbf{S}^{(2)} = (s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \dots, s_n^{(2)})^T$ 称为二级分差向量。对表中所示的比赛结果, 求向量 $\mathbf{S}^{(2)}$;

(3) 定义矩阵 $\mathbf{M} = (m_{ij})_{n \times n}$, 其中 $m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } j \in T_i, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 试给出由 \mathbf{M} 和 \mathbf{S} 计算 $\mathbf{S}^{(2)}$ 的公式, 并说明 \mathbf{M}^2 中各元素的含义。

(4) 类似地, 对任意整数 r , 可定义 r 级比赛和 r 级分差向量 $\mathbf{S}^{(r)}$, 试给出由 \mathbf{M} 和 \mathbf{S} 计算 $\mathbf{S}^{(r)}$ 的公式。