

# 排序问题

## T1

### T1.1

对于  $\mu$  的任一分量  $\mu_i$ , 我们可以知道  $\forall \mu \in \mathbb{R}$ ,

$|\mu - \sigma_i^1| + |\mu - \sigma_i^2| + \cdots + |\mu - \sigma_i^k| > |\mu_i - \sigma_i^1| + |\mu_i - \sigma_i^2| + \cdots + |\mu_i - \sigma_i^k|$ , 我们可以知道,  $\mu_i$  为  $\{\sigma_i^1, \sigma_i^2, \cdots, \sigma_i^k\}$  的中位数

$$\therefore \mu_i = \begin{cases} \sigma_i^{k/2}, & k \text{ 为偶数} \\ \sigma_i^{(k+1)/2}, & k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

我们取  $\sigma_i'$  为  $\mu_i$  在  $\{\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_k\}$  中的排序, 对于相同的值则随机排序, 即为一种综合排序。然而,  $\sigma^*$  不能从中得出, 因为可能有相同的值。

### T1.2



对于 ABC 三点, C 在线段 AB 上,  $|C - A| + |C - B| = \text{const}$  所以我们可以认为这两个点对于

$\sum_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i|$  与  $\sum_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i|$  的贡献是相同的, 所以我们可以令

$$\sum_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i| = C + x_1$$

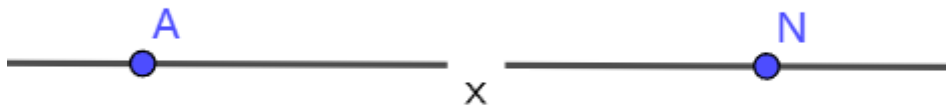
$$\sum_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i| = C + x_2$$

其中常数 C 是共同贡献的总值, 于是

$$\frac{\sum_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i|}{\sum_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i|} = \frac{C + x_1}{C + x_2}$$

可知常数 C 越小, 比值越大

假设  $n - 1$  个点重合, 排序  $\sigma_j^i = N$  点 A 距离  $\sigma_j^i$  距离为  $x$



$\mu_j$  为中位数, 所以  $\mu_j$  与 N 点重合

$$\sum_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i| = x$$

$\mu_j$  为平均数,  $|\mu_j - N| = \frac{x}{n}$

$$\sum_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i| = x + (n-2) \frac{x}{n}$$

所以

$$\frac{\sum_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i|}{\sum_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i|} = 1 + \frac{n-2}{n} \leq 2$$

得证

### T1.3

$$\begin{aligned} d(\sigma', \Sigma) &= \sum_{i=1}^k L_1(\sigma', \sigma) \leq \sum_{i=1}^k L_1(\sigma', \mu) + \sum_{i=1}^k L_1(\mu, \sigma) \\ &\leq \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^*, \mu) + \sum_{i=1}^k L_1(\mu, \sigma) \\ &\leq \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^*, \sigma) + \sum_{i=1}^k L_1(\sigma, \mu) + \sum_{i=1}^k L_1(\mu, \sigma) \\ &= \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^*, \sigma) + 2 \sum_{i=1}^k L_1(\mu, \sigma) \\ &= d(\sigma^*, \Sigma) + 2d(\mu, \Sigma) \\ &\leq 3d(\sigma^*, \Sigma) \end{aligned}$$

同理, 由T1.2知

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n |\beta_j - \sigma_j^i| &\leq 2 \sum_{i=0}^n |\mu_j - \sigma_j^i| \\ d(\sigma', \Sigma) &= \sum_{i=1}^k L_1(\sigma', \sigma) \leq \sum_{i=1}^k L_1(\sigma', \beta) + \sum_{i=1}^k L_1(\beta, \sigma) \\ &\leq \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^*, \sigma) + 2 \sum_{i=1}^k L_1(\beta, \sigma) \\ &\leq \sum_{i=1}^k L_1(\sigma^*, \sigma) + 4 \sum_{i=1}^k L_1(\mu, \sigma) \\ &\leq 5d(\sigma^*, \Sigma) \end{aligned}$$

得证

## T2

### T2.1

$$S = (7, 8, -10, -5)^T$$

### T2.2

$$S^{(2)} = (37, -7, -17, -5)^T$$

### T2.3

$$s^i = \sum_{j \in T_i} q_{ij}$$

在讨论  $S^{(2)}$  的计算时,

对于每个  $s_i^{(2)}$  我们首先考虑单个  $j$  的情况, 对于  $\forall k \in T_j, q_{ik}^{(2)} = q_{ij} + q_{jk}$ , 所以

$$q_{ik}^{(2)} = \sum_{j \in T_i} q_{ij} + q_{jk} = lq_{ij} + s_j$$

所以,  $s_i^{(2)}$  即为上式求和

$$s_i^{(2)} = \sum_{j \in T_i} lq_{ij} + s_j = \sum_{j=0}^n m_{ij}(s_j + q_{ij}l) = \sum_{j=0}^n m_{ij}s_j + s_i l$$

如此求出每个  $s_i^{(2)}$ , 即可得到  $S^{(2)}$

$$S^{(2)} = (M + l * E)S$$

对于  $M^2$  若  $m_{ik}^2 \neq 0$ , 则必然  $\exists j$  使得  $m_{ij}m_{jk} = 1$  所以  $m_{ik}^2$  的值即为  $j$  的个数, 即为  $i$  与  $k$  之间发生的间接比赛的场数

所以  $M^2$  保存了所有间接比赛的场数

### T2.4

我们易知

$$S^{(3)} = MS^{(2)} + l^2 S$$

$$S^{(n)} = MS^{(n-1)} + l^{n-1} S$$

所以递推得到

$$S^{(n)} = M^{n-1} S + (M^{n-1} - l^{n-1} E)(M - lE)^{-1} l S$$