

随机模型

第一题

1.1

旧赛制进球数概率

	0	1	2
先 X	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2
后 Y	$(1-q)^2$	$2q(1-q)$	q^2

$$\begin{aligned}P\{\text{先手胜}\} &= P\{X > Y\} = 2p^2q(1-q) + 2(1-q)^2p(1-p) + p^2(1-q)^2 = (1-q)p[2pq + 2(1-p)(1-q) + p(1-q)] \\P\{\text{后手胜}\} &= P\{X < Y\} = 2q^2p(1-q) + 2(1-p)^2q(1-q) + q^2(1-p)^2 = 2(1-p)q[2pq + 2(1-p)(1-q) + q(1-p)] \\P\{\text{相同}\} &= P\{X = Y\} = [pq + (1-p)(1-q)]^2\end{aligned}$$

新赛制进球数概率

	0	1	2
先 X	$(1-p)(1-q)$	$p(1-q) + q(1-p)$	pq
后 Y	$(1-p)(1-q)$	$p(1-q) + q(1-p)$	pq

$$\begin{aligned}P\{\text{先手胜}\} &= P\{X > Y\} = p(1-p)[q^2 + (1-q)^2] + q(1-q)[p^2 + (1-p)^2] + pq(1-p)(1-q) \\P\{\text{后手胜}\} &= P\{X < Y\} = p(1-p)[q^2 + (1-q)^2] + q(1-q)[p^2 + (1-p)^2] + pq(1-p)(1-q) \\P\{\text{相同}\} &= P\{X = Y\} = [(1-p)(1-q)]^2 + [p(1-q) + q(1-p)]^2 + p^2q^2\end{aligned}$$

在 $p = \frac{3}{4}, q = \frac{2}{3}$ 时

	先胜	后胜	平
旧	$\frac{17}{48}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{61}{144}$
新	$\frac{41}{144}$	$\frac{41}{144}$	$\frac{62}{144}$

1.2

无论在新旧规则下，加赛第一轮都是先罚球队先罚球，后罚球队后罚球。

所以，先罚球队获胜概率为: $p(1-q)$ ，后罚球队获胜概率为: $q(1-p)$

第二题

2.1

若 A 第一轮得分，则获胜，若不得分，若对手也不得分，则进入下一轮循环

所以概率为

$$P\{A \text{ 获胜}\} = (\alpha + \beta) \sum_{i=0} \gamma^i = \frac{\alpha + \beta}{1 - \gamma^2}$$

2.2

$$P\{A \text{ 获胜}\} = \alpha + a\beta + b\gamma$$

考虑 a 的情况

1. B 不得分，A 胜利

2. B射门, A在突然死亡中胜利

所以 $a = \gamma + \beta \frac{\alpha + \beta}{1 - \gamma^2}$

考虑 b 的情况

B 在突然死亡中获胜的概率为 $\frac{\alpha + \beta}{1 - \gamma^2}$, 则 A 获胜的概率 $b = P\{\bar{B}\} = 1 - P\{B\} = 1 - \frac{\alpha + \beta}{1 - \gamma^2}$

2.3

由 2.2 的结论可知

$$P\{A \text{ 获胜}\} = \alpha + (\gamma + \beta \frac{\alpha + \beta}{1 - \gamma^2})\beta + (1 - \frac{\alpha + \beta}{1 - \gamma^2})\gamma$$

修改以前, 代入 $\alpha + \beta = 1 - \gamma$ 我们可以知道

$$P\{A \text{ 获胜}\} = \frac{\alpha + \beta}{1 - \gamma^2} = \frac{1}{1 + \gamma}$$

所以, 先手获胜的概率是更大的, 尤其是不得分的概率很小时

修改之后,

1. γ 很大, 即 $\gamma \rightarrow 1$ 时

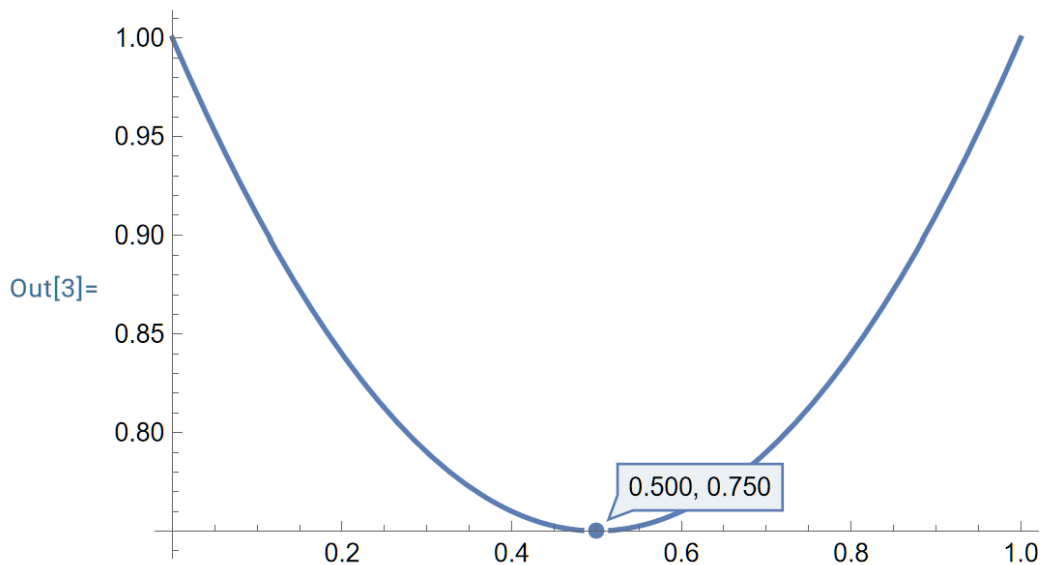
$$P = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} = \frac{1}{2}$$

2. γ 很小, 即 $\gamma \rightarrow 0$ 时

$$P = \alpha + \beta^2, \text{ 此时我们令 } \alpha = 1 - \beta, \text{ 可知 } P = 1 - \beta + \beta^2$$

In[3]:= Plot[1 - b + b^2, {b, 0, 1}]

绘图



先手仍更有可能获胜, 但是在 β 没有很大或很小的情况时, 比修改之前小。

注: β 很大导致先手获胜概率大是因为第三轮突然死亡先手得分概率很大, β 很小则先手在第一轮就容易获胜。如果要使得先手后手更加公平, 需要继续推迟突然死亡的机制